LA BIBLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Résolution linéaire : Ordre 1, Ordre 2 et Second Membre

1. STRUCTURE DE LA SOLUTION

Quelle que soit l'équation linéaire ($y' + ay = b$ ou $ay'' + by' + cy = f(t)$).

Théorème de Superposition

La solution générale est toujours la somme de deux termes :

$$S_{\text{Générale}} = S_{\text{Homogène}} + S_{\text{Particulière}}$$

— S_H : Solution de l'équation **sans second membre** ($= 0$). Elle contient les constantes K (ou A, B).

— S_P : Une solution qui marche pour le **second membre**.

2. ORDRE 1 : $Y' + A(T)Y = B(T)$

Le classique des circuits RC et RL en physique.

1. Solution Homogène ($y' + a(t)y = 0$) :

$$y_H(t) = K \cdot e^{-A(t)}$$

Où $A(t)$ est une **primitive** de $a(t)$. *Exemple : Si $y' + 2y = 0$, alors $a(t) = 2$, $A(t) = 2t$, donc $y_H = Ke^{-2t}$.*

2. Solution Particulière (y_P) :

— Si le second membre est constant, cherchez une constante.

— Sinon : **Variation de la constante** (Méthode de Lagrange). On pose $y(t) = K(t)e^{-A(t)}$ et on cherche $K'(t)$.

3. ORDRE 2 : $AY'' + BY' + CY = 0$

Indispensable pour les oscillateurs (Ressort, RLC).

On résout l'**Équation Caractéristique** :

$$ar^2 + br + c = 0$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas	**Racines** (r)	**Solution** $y(t)$ **(Base réelle)**
$\Delta > 0$	r_1, r_2 (Réelles)	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	r_0 (Double)	$y(t) = (At + B)e^{r_0 t}$ *(Oubliez pas le t !)*
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\omega$	$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$

Note Physique :

— Si $\Delta < 0$, on est en régime **pseudo-périodique** (oscillations amorties).

— Si $\Delta > 0$, on est en régime **apériodique** (retour lent à l'équilibre).

4. TROUVER LA SOLUTION PARTICULIÈRE (S_P)

Astuce : La solution ressemble souvent au second membre.

Pour l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$:

Si $f(t)$ est...	**Chercher $y_P(t)$ sous la forme...**
Polynôme $P_n(t)$	Polynôme $Q_n(t)$ (même degré)
$Ke^{\alpha t}$	$\lambda e^{\alpha t}$ (sauf si α est racine caractéristique)
$K\cos(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Principe de Superposition (Magique) : Si le second membre est $f_1(t) + f_2(t)$, alors $y_P = y_{P1} + y_{P2}$.

5. PROBLÈME DE CAUCHY

Pour trouver les constantes K ou A, B (l'unicité de la solution), il faut utiliser les conditions initiales (à $t = 0$).

— **Ordre 1 :** Une condition nécessaire ($y(0) = y_0$).
— **Ordre 2 :** Deux conditions nécessaires ($y(0) = y_0$ ET $y'(0) = v_0$).

WARM-UP : SPEED QUIZ

Résoudre de tête (Solution Homogène uniquement) :

1. $y' - y = 0 \implies y_H = \dots$
2. $y' + 3y = 0 \implies y_H = \dots$
3. $y'' + \omega^2 y = 0 \implies y_H = \dots$
   (Oscillateur harmonique !)
4. $y'' - y = 0 \implies y_H = \dots$

DÉFI YASPREPA : NIVEAU CONCOURS

Exercice 1 : La Totale (Ordre 1)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E_1) : \quad y' + y = e^{-t}$$

1. Trouver la solution homogène. 2. Trouver une solution particulière (Attention, e^{-t} est déjà solution de l'homogène ! Chercher sous la forme $\lambda t e^{-t}$). 3. Donner la solution unique telle que $y(0) = 1$.

Exercice 2 : Oscillations (Ordre 2)
Soit l'équation :

$$(E_2) : \quad y'' + 2y' + 2y = 0$$

1. Former l'équation caractéristique et calculer Δ. 2. Déterminer les racines complexes. 3. En déduire la forme réelle de la solution. 4. Tracer l'allure de la courbe (Oscillations amorties par l'exponentielle).

Exercice 3 : Superposition
Sans calculs longs, quelle est la *forme* de la solution particulière de :

$$y'' + y = x^2 + e^{3x}$$

(Réponse attendue : $ax^2 + bx + c + \lambda e^{3x}$)

Retrouvez tous les documents sur www.yasprepa.fr