

# LA BIBLE DE LA DÉRIVATION

*Le guide complet : Usuelles, Composées et Formule de Leibniz*

## 1. OPÉRATIONS FONDAMENTALES

*La base absolue. Ne jamais confondre produit et somme.*

### Règles de calcul

**Produit :**

$$(uv)' = u'v + uv'$$

**Inverse :**

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

**Quotient :**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**Puissance :**

$$(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

## 2. DÉRIVÉES USUELLES

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de validité
$x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^*$ )
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

## 3. DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE $F(U)$

La règle d'or en prépa : *N'oubliez jamais de multiplier par  $u'$  !*

### Formule Générale

$$(f(u(x)))' = \underbrace{u'(x)}_{\text{Dérivée interne}} \times \underbrace{f'(u(x))}_{\text{Dérivée externe}}$$

Exemples incontournables :

> Exponentielle :  $(e^u)' = u'e^u$

> Logarithme :  $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

> Racine :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

> Puissance  $\alpha$  :  $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

## 4. FONCTIONS RÉCIPROQUES (NIVEAU PRÉPA)

À connaître par cœur pour les intégrales et les DL.

Fonction	Dérivée	Domaine
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$

## 5. DÉRIVÉE N-IÈME (FORMULE DE LEIBNIZ)

Pour dériver  $n$  fois un produit de fonctions (similaire au binôme de Newton).

### Formule de Leibniz

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Où  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## WARM-UP : SPEED QUIZ

**Consigne :** Répondez en moins de 30 secondes par question.

**Calculer la dérivée de :**

**Vrai ou Faux ?**

1.  $f(x) = \ln(3x + 1)$   
 $\Rightarrow f'(x) = \dots$

— La dérivée de  $\ln(u)$  est  $1/u$ .  
 Vrai  Faux

2.  $g(x) = e^{x^2}$   
 $\Rightarrow g'(x) = \dots$

—  $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ .  
 Vrai  Faux

3.  $h(x) = \cos(5x)$   
 $\Rightarrow h'(x) = \dots$

—  $\arctan'(x) = \arcsin'(x)$ .  
 Vrai  Faux

4.  $k(x) = \frac{1}{1+x^2}$   
 $\Rightarrow$  Primitive ?

## DÉFI YASPREPA : NIVEAU CONCOURS

**Thème :** Dérivées n-ièmes et Étude de fonction.

### Partie A : Calcul technique

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \arctan(x) - x$ . 1. Calculer  $f'(x)$ . 2. En déduire le sens de variation de  $f$ . 3. Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\arctan(x) < x$ .

### Partie B : Formule de Leibniz (Classique)

Soit la fonction  $h$  définie par  $h(x) = x^2 e^x$ . On cherche à calculer la dérivée n-ième  $h^{(n)}(x)$  pour tout  $n \geq 2$ .

1. Posons  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x^2$ .

— Calculer  $u^{(k)}(x)$  pour tout  $k$ .

— Calculer  $v'(x)$ ,  $v''(x)$  et  $v^{(3)}(x)$ . Que valent les dérivées suivantes ?

2. Appliquer la formule de Leibniz pour exprimer  $h^{(n)}(x)$ . (*Attention, la somme ne contiendra que 3 termes non nuls !*)

3. Factoriser l'expression obtenue par  $e^x$ .

Retrouvez tous les autres documents sur [www.yasprepa.fr](http://www.yasprepa.fr)