LA BIBLE DES
PRIMITIVES & INTÉGRALES

Le guide exhaustif : Usuelles, Hyperboliques et Techniques

1. LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Lien Primitive-Intégrale

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. PRIMITIVES USUELLES (LISTE COMPLÈTE)

À connaître par cœur. La constante C est omise.

1. Puissances et Logarithmes

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Condition**
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$n > 1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

2. Exponentielles et Trigonométrie

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$

3. Fonctions Hyperboliques (Spécial Prépa)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$

3. FRACTIONS RATIONNELLES & RACINES

Reconnaître ces formes est essentiel pour les concours difficiles.

$$\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \arctan(x)$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} \longrightarrow \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \ \textbf{(Vital !)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \arcsin(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow \operatorname{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow \operatorname{argch}(x) = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|$$

4. TECHNIQUES FONDAMENTALES

A. Formes Composées $u'f(u)$

- $\displaystyle\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
- $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$
- $\displaystyle\int u'e^u = e^u$
- $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan(u)$

B. Intégration par Parties (IPP)

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Choix de u (ALPES) : Arctan > Ln > Polynôme > Exp > Sin/Cos.

C. Changement de Variable (CdV)

Si $x = \varphi(t)$ (bijective, $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

WARM-UP : SPEED QUIZ

Primitive immédiate (sans constante) :

1. $f(x) = \ln(x) \implies F = \dots$
2. $f(x) = \tan(x) \implies F = \dots$
3. $f(x) = \frac{1}{4+x^2} \implies F = \dots$
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \implies F = \dots$
5. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \implies F = \dots$
6. $f(x) = \cos^2(x) \implies F = \dots$
   (Indice : linéariser)

DÉFI YASPREPA : NIVEAU CONCOURS

1. Une intégrale classique (mais piégeuse)
Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

— *Méthode 1 :* Poser le changement de variable $u = e^x$.
— *Méthode 2 :* Remarquer que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Intégration par Parties "inversée"
Calculer la primitive de $\arctan(x)$.

— *Indice :* Poser $u(x) = \arctan(x)$ et $v'(x) = 1$.
— Vous tomberez sur une forme $\frac{u'}{u}$.

3. Intégrale de Wallis (Récurrence)
Soit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. Montrer à l'aide d'une IPP que :

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Retrouvez tous les autres documents sur www.yasprepa.fr