COURS COMPLET
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Cauchy-Lipschitz Linéaire, Exponentielle Matricielle, Systèmes

Table des matières

1 Cadre Général

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie n.

1.1 Définitions

DÉFINITION : Équation Différentielle Linéaire (EDL)

Une EDL d'ordre 1 est une équation de la forme :

$$(E) \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

où :

— $a : I \to \mathcal{L}(E)$ est continue (application linéaire dépendant du temps).

— $b : I \to E$ est continue (second membre).

— $x : I \to E$ est la fonction inconnue.

L'équation **homogène** associée est $(H) : x'(t) = a(t) \cdot x(t)$.

DÉFINITION : Problème de Cauchy

C'est la donnée de l'équation et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{avec } (t_0, x_0) \in I \times E$$

1.2 Lien Scalaire / Vectoriel

PROPOSITION : Réduction d'ordre

Une équation scalaire linéaire d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t)$$

se ramène à un système différentiel d'ordre 1 dans $E = \mathbb{R}^n$ en posant le vecteur $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

1.3 Forme Intégrale

Le problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u)x(u) + b(u)\big)du$$

2 Structure des Solutions

2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz Linéaire

C'est le résultat fondamental. Contrairement au cas non-linéaire, les solutions n'explosent pas en temps fini sur l'intervalle de définition des coefficients.

THÉORÈME : Existence et Unicité Globale

Si a et b sont continues sur l'intervalle I, alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy admet une **unique solution maximale** définie sur **l'intervalle I tout entier**.

2.2 Structure Vectorielle (Cas Homogène)

THÉORÈME : Espace des Solutions de (H)

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$. L'application "évaluation en t_0" :

$$\phi_{t_0} : \begin{aligned} \mathcal{S}_H &\to E \\ x &\mapsto x(t_0) \end{aligned}$$

est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**.

PROPOSITION : Dimension

— Si (E) est un système dans un espace de dimension n : $\dim(\mathcal{S}_H) = n$.

— Si (E) est une équation scalaire d'ordre n : $\dim(\mathcal{S}_H) = n$.

2.3 Structure Affine (Cas Général)

PROPOSITION : Principe de Superposition

L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre (E) est un **espace affine** de direction $\mathcal{S}_H$.

$$\mathcal{S}_E = \{x_p + x_h \mid x_h \in \mathcal{S}_H\}$$

où x_p est une solution particulière.

RAPPEL : Cas non normalisé

Si l'équation est $a(t)x' + b(t)x = c(t)$, on doit se placer sur des intervalles où $a(t)$ ne s'annule pas pour appliquer les théorèmes (normalisation). Les points où $a(t) = 0$ sont des singularités (raccordement possible).

3 Exponentielle d'Endomorphisme

3.1 Définition et Propriétés

DÉFINITION : Exponentielle

Pour $A \in \mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), on définit :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

La série est absolument convergente (norme d'algèbre).

PROPOSITION : Propriétés

- Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
- e^A est toujours inversible, d'inverse e^{-A}.
- Si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, alors $e^D = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_i})$.
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.

3.2 Analyse

THÉORÈME : Dérivée

L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A \cdot \exp(tA) = \exp(tA) \cdot A$$

4 Systèmes à Coefficients Constants

On considère $X' = AX$ où A est une matrice **constante**.

THÉORÈME : Solution

L'unique solution du problème de Cauchy $X(t_0) = X_0$ est :

$$X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$$

4.1 Méthode de Calcul (Dim 2 ou 3)

Pour calculer e^{tA} : 1. **Diagonalisation :** Si A est diagonalisable ($A = PDP^{-1}$), alors $X(t) = Pe^{(t-t_0)D}P^{-1}X_0$. 2. **Décomposition :** Si A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable (Dunford implicite), on écrit $A = D + N$ avec $DN = ND$ et N nilpotente. Alors $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$ (série finie pour N).

Remarque qualitative : Le comportement en $+\infty$ dépend du signe des parties réelles des valeurs propres de A.

5 Équations Scalaires d'Ordre 2

On étudie $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$.

5.1 Wronskien

DÉFINITION : Wronskien

Soient x_1, x_2 deux solutions de l'homogène. Le Wronskien est le déterminant :

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$$

PROPOSITION : Liouville et Base

W vérifie l'équation différentielle $W' = -a(t)W$. Ainsi, soit W est tout le temps nul (famille liée), soit jamais nul (famille libre $\to$ base).

5.2 Méthode de Variation des Constantes

Pour trouver une solution particulière $x_p(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t)$, on résout le système (d'inconnues λ_1', λ_2') :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien (non nul), donc λ_1', λ_2' existent.