COURS COMPLET
FONCTIONS VECTORIELLES

Dérivation, Intégration et Formules de Taylor

Table des matières

1 Dérivabilité **2**

1.1 Définition et Caractérisation 2

1.2 Coordonnées et Interprétation 2

2 Opérations Algébriques **2**

2.1 Linéarité et Composition 2

2.2 Bilinéarité et Déterminant 3

3 Intégration **3**

3.1 Définition et Propriétés 3

3.2 Inégalité Triangulaire (Fondamental) 3

4 Lien Dérivée-Intégrale **4**

4.1 Théorème Fondamental 4

4.2 Inégalité des Accroissements Finis (IAF) 4

5 Formules de Taylor **4**

5.1 Taylor avec Reste Intégral (Égalité) 4

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange 4

5.3 Taylor-Young (Local) 5

1 Dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. Les fonctions sont définies sur I à valeurs dans E.

1.1 Définition et Caractérisation

DÉFINITION : Dérivabilité en un point

Une fonction $f : I \to E$ est **dérivable** en $t_0 \in I$ si le taux d'accroissement admet une limite finie dans E :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

$f'(t_0)$ est le vecteur dérivé en t_0.

PROPOSITION : Caractérisation par DL1

f est dérivable en t_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot \vec{v} + o(t - t_0)$$

Avec $\vec{v} = f'(t_0)$.

1.2 Coordonnées et Interprétation

PROPOSITION : Coordonnées

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $f(t) = \sum x_i(t)e_i$. f est dérivable en $t_0 \iff$ toutes les composantes x_i sont dérivables. Dans ce cas : $f'(t_0) = \sum x_i'(t_0)e_i$.

Interprétation cinématique : Si t est le temps et $f(t)$ la position, $f'(t)$ est le vecteur vitesse tangent à la trajectoire.

2 Opérations Algébriques

2.1 Linéarité et Composition

PROPOSITION : Opérations usuelles

— **Combinaison :** $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

— **Composition (Fonction réelle) :** Si $\varphi : J \to I$ est dérivable, alors $(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$.

— **Composition (Application Linéaire) :** Si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$. *Attention : La dérivée d'une application linéaire constante est elle-même (en tant qu'application), mais ici on dérive par rapport à t.*

2.2 Bilinéarité et Déterminant

PROPOSITION : Formes Bilinéaires

Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue (ex : produit scalaire, produit vectoriel). Si f et g sont dérivables :

$$\frac{d}{dt}B(f(t), g(t)) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

PROPOSITION : Cas du Produit Scalaire et Norme

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$$

Corollaire (Norme constante) : Si $\|f(t)\|$ est constante, alors $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ (Vitesse orthogonale à la position).

PROPOSITION : Déterminant

Si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions vectorielles dans une base $\mathcal{B}$:

$$\left(\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)\right)' = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f'_k, \dots, f_n)$$

3 Intégration

Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction continue par morceaux.

3.1 Définition et Propriétés

DÉFINITION : Intégrale

On définit l'intégrale composante par composante dans une base. Le vecteur obtenu, $\int_{[a,b]} f$, ne dépend pas de la base choisie.

PROPOSITION : Propriétés

- **Linéarité :** $\int(\lambda f + g) = \lambda \int f + \int g$.
- **Chasles :** $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.
- **Image par L :** Pour toute application linéaire L :

$$L\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b L(f(t))dt$$

3.2 Inégalité Triangulaire (Fondamental)

THÉORÈME : Inégalité Triangulaire

Pour $a \leq b$:

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

C'est la généralisation vectorielle de $|\int f| \leq \int |f|$.

4 Lien Dérivée-Intégrale

4.1 Théorème Fondamental

THÉORÈME : Intégrale fonction de la borne supérieure

Si f est continue sur I et $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

4.2 Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Attention : L'égalité des accroissements finis $(f(b) - f(a) = (b-a)f'(c))$ *est* ***FAUSSE*** *en vectoriel (ex : hélice circulaire).*

THÉORÈME : I.A.F.

Soit $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|$$

5 Formules de Taylor

5.1 Taylor avec Reste Intégral (Égalité)

THÉORÈME : Taylor avec Reste Intégral

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, pour tout $(a, x) \in I^2$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

THÉORÈME : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si $\|f^{(n+1)}\|$ est majorée par M_{n+1} :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

5.3 Taylor-Young (Local)

THÉORÈME : Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$