COURS COMPLET
INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

Intégrabilité, Convergence Dominée, Intégrales à Paramètres

Table des matières

1 Intégrales Convergentes (Généralisées)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux (CPM) de I dans $\mathbb{K}$.

1.1 Sur un intervalle semi-ouvert $[a, +\infty[$

DÉFINITION : Convergence

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite **convergente** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Notation : En cas de divergence de fonctions positives, on écrit $\int_a^{+\infty} f = +\infty$.

1.2 Sur un intervalle quelconque $]a, b[$

On dit que l'intégrale converge si elle converge en chaque borne (limites finies de $\int_x^c f$ et $\int_c^y f$). **Relation de Chasles :** Si l'intégrale converge, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pour tout $c \in]a, b[$.

1.3 Exemples de Référence (Riemann)

PROPOSITION : Riemann et Exponentielle

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

— $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge $\iff a > 0$.

2 Fonctions Intégrables

2.1 Définition et Espace L^1

DÉFINITION : Intégrabilité

Une fonction f (CPM) est dite **intégrable** sur I si l'intégrale de sa valeur absolue converge :

$$\int_I |f(t)|dt < +\infty$$

On note $f \in L^1(I)$. On dit aussi que l'intégrale est **absolument convergente**.

THÉORÈME : Absolue convergence $\implies$ Convergence

Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est convergente.

Attention : La réciproque est fausse (intégrales semi-convergentes, hors programme d'étude approfondie).

2.2 Théorèmes de Comparaison

Soient f et g deux fonctions CPM **positives**.

PROPOSITION : Comparaison Positive

— Si $0 \leq f \leq g$ et g intégrable $\implies$ f intégrable.
— Si $f = O(g)$ (au voisinage des bornes) et g intégrable $\implies$ f intégrable.
— Si $f \sim g$ (au voisinage des bornes), alors f et g sont de même nature.

3 Techniques de Calcul

3.1 Intégration par Parties (IPP)

PROPOSITION : IPP Généralisée

Soient f, g de classe $\mathcal{C}^1$. Si le terme tout intégré $[f(t)g(t)]_a^b$ admet des limites finies, alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

3.2 Changement de Variable

THÉORÈME : Changement de Variable

Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Les intégrales suivantes sont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$$

4 Intégration des Relations Asymptotiques

Soient f, g positives et CPM avec $f \sim g$ en b (borne ouverte).

THÉORÈME : Intégration des Équivalents

— **Cas Divergent :** Si $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$.
— **Cas Convergent :** Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$ (restes).

5 Passage à la Limite sous l'Intégrale

5.1 Théorème de Convergence Dominée (TCD)

THÉORÈME : Convergence Dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions CPM sur I. Si :

1. (f_n) converge simplement vers f sur I (et f est CPM).
2. **Hypothèse de Domination :** Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ **intégrable** telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors les f_n et f sont intégrables et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$$

5.2 Intégration Terme à Terme (Séries de Fonctions)

RAPPEL : Pratique

Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité (ou de sommabilité), sans toujours expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t, bien qu'elles soient théoriquement requises.

THÉORÈME : Intégration Terme à Terme (Cas Positif)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Si :

1. Les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.
2. Les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (Positives).
3. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue par morceaux.

Alors :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt \quad \text{(dans } [0, +\infty])$$

Conséquence : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I $\iff$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt < +\infty$.

THÉORÈME : Intégration Terme à Terme (Cas Général)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :

1. Les fonctions f_n sont continues par morceaux et **intégrables** sur I.
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue par morceaux.
3. **Hypothèse de Sommabilité :** La série des intégrales des modules converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|dt < +\infty$$

Alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **intégrable** sur I et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

6 Intégrales à Paramètre $F(x) = \int_I f(x,t)dt$

6.1 Continuité

THÉORÈME : Continuité sous le signe somme

Si :

1. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
2. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est CPM sur I.
3. **Domination Locale :** Pour tout segment $K \subset A$, il existe φ_K intégrable sur I telle que $\forall x \in K, \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$.

Alors F est définie et continue sur A.

6.2 Dérivabilité ($\mathcal{C}^1$)

THÉORÈME : Dérivation sous le signe somme

Si :

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
2. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et vérifie :
   — $\forall t$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.
   — $\forall x$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est CPM sur I.
3. **Domination de la dérivée :** Pour tout segment $K \subset A$, il existe ψ_K intégrable sur I telle que $\forall x \in K, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi_K(t)$.

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur A et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

6.3 Régularité d'ordre Supérieur ($\mathcal{C}^k$)

THÉORÈME : Classe $\mathcal{C}^k$ sous le signe somme

Si :

1. Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.
2. Pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$ et tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I.
3. Les dérivées partielles par rapport à x sont CPM par rapport à t.
4. **Domination de la dérivée k-ième :** Pour tout segment $K \subset A$, il existe φ_K intégrable sur I telle que :
$$\forall x \in K, \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et on peut dériver k fois sous l'intégrale.