COURS COMPLET
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Convergences (Simple, Uniforme, Normale) et Régularité

Table des matières

1 Suites de Fonctions : Modes de Convergence

Soit A une partie d'un espace vectoriel E (souvent un intervalle de $\mathbb{R}$) et F un espace vectoriel normé de dimension finie (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Convergence Simple (C.S.)

DÉFINITION : Convergence Simple

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f sur A si :

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

C'est une convergence "point par point".

1.2 Convergence Uniforme (C.U.)

DÉFINITION : Convergence Uniforme

La suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur A si :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \right) = 0$$

On note souvent $\|g\|_\infty = \sup_{x\in A} \|g(x)\|_F$. Alors : $f_n \xrightarrow{C.U.} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

PROPOSITION : Lien C.U. / C.S.

$$\text{Convergence Uniforme} \implies \text{Convergence Simple}$$

La réciproque est fausse.

2 Régularité de la Limite (Suites)

2.1 Continuité et Double Limite

THÉORÈME : Continuité de la limite

Si (f_n) est une suite de fonctions **continues** sur A et si (f_n) converge **uniformément** vers f sur A, alors :

$$f \text{ est continue sur } A.$$

THÉORÈME : Interversion des limites (Double limite)

Soit a un point adhérent à A. Si :

— (f_n) converge **uniformément** vers f sur A (ou localement au voisinage de a).

— Pour tout n, $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$.

Alors la suite (ℓ_n) converge vers une limite ℓ, et f admet pour limite ℓ en a.

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))$$

2.2 Intégration sur un Segment

THÉORÈME : Interversion Limite / Intégrale

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$. Si (f_n) converge **uniformément** vers f sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t)dt$$

Extension : Si la convergence est uniforme sur tout segment de I, la suite des primitives $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ converge uniformément sur tout segment vers $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

2.3 Dérivation

THÉORÈME : Théorème de Dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Si :

1. Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))$ converge. (Ou convergence simple sur I).
2. La suite des dérivées (f_n') converge **uniformément** sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)' = \lim_{n\to\infty} (f_n')$$

Généralisation : Ce théorème s'étend aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (convergence simple des dérivées jusqu'à $k-1$ et uniforme de la dérivée k-ième).

3 Séries de Fonctions

3.1 Définitions

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ la somme partielle et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)$ le reste (en cas de convergence).

— **Convergence Simple :** La série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour tout x.

— **Convergence Uniforme :** La suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément.
Critère : $\sum f_n$ converge uniformément $\iff$ le reste (R_n) converge uniformément vers 0.

3.2 Convergence Normale (C.N.)

C'est le critère le plus pratique et le plus fort.

DÉFINITION : Convergence Normale

La série $\sum f_n$ converge **normalement** sur A si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente. (Où $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f_n(x)\|$).

THÉORÈME : Implications

$$\text{Convergence Normale} \implies \text{Convergence Uniforme} \implies \text{Convergence Simple}$$

De plus, la C.N. implique la convergence absolue en tout point.

3.3 Propriétés des Séries de Fonctions

Les théorèmes vus pour les suites s'appliquent directement aux séries (via les sommes partielles) :

PROPOSITION : Continuité, Intégration, Dérivation

On suppose que les f_n sont continues (resp. $\mathcal{C}^1$).

— **Continuité :** Si $\sum f_n$ converge **uniformément** (ou normalement) sur A, la somme $S = \sum f_n$ est continue.

— **Intégration :** Si $\sum f_n$ converge **uniformément** sur $[a, b]$, alors $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$.

— **Dérivation :** Si $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment, alors S est $\mathcal{C}^1$ et $S' = \sum f_n'$.

4 Approximation

4.1 Fonctions en escalier

PROPOSITION : Approximation par fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur ce segment.

4.2 Théorème de Weierstrass

THÉORÈME : Théorème de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions **polynomiales**.

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \quad \exists (P_n) \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}, \quad \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Conséquence : Les polynômes sont denses dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.