COURS COMPLET
SÉRIES ENTIÈRES

Rayon de convergence, Régularité et Développements Usuels

Table des matières

1 Généralités et Rayon de Convergence

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite de coefficients (réels ou complexes) et z la variable.

1.1 Lemme d'Abel et Définition

THÉORÈME : Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est **bornée** (pour un certain $z_0 \neq 0$), alors : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est **absolument convergente**.

DÉFINITION : Rayon de Convergence

Le rayon de convergence R est l'unique réel dans $[0, +\infty]$ défini par :

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

THÉORÈME : Propriétés de Convergence

Soit R le rayon de convergence.

- Si $|z| < R$: La série converge **absolument**.
- Si $|z| > R$: La série **diverge grossièrement** (le terme général ne tend pas vers 0).
- Si $|z| = R$: Cas douteux (tout peut arriver).

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est le **Disque Ouvert de Convergence**.

1.2 Calcul Pratique du Rayon

PROPOSITION : Comparaison

- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

PROPOSITION : Règle de d'Alembert

Si la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors :

$$R = \frac{1}{\ell} \quad (\text{avec convention } 1/0 = +\infty, 1/\infty = 0)$$

1.3 Opérations

- **Somme :** Le rayon de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est au moins $\min(R_a, R_b)$.
- **Produit de Cauchy :** Le rayon du produit est au moins $\min(R_a, R_b)$.
- **Dérivée :** Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le **même rayon de convergence**.

2 Propriétés de la Somme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

2.1 Variable Complexe (Continuité)

THÉORÈME : Continuité

La somme $S(z)$ est **continue** sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Justification : Pour tout $r < R$, la série converge **normalement** sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$.

2.2 Variable Réelle (Régularité)

Soit x une variable réelle. On se place sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

THÉORÈME : Classe $\mathcal{C}^\infty$

La fonction somme $S : x \mapsto \sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Ses dérivées s'obtiennent par **dérivation terme à terme** :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \ldots \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

PROPOSITION : Coefficients et Taylor

Il y a unicité des coefficients. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, alors :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

2.3 Comportement au bord (Théorème d'Abel Radial)

THÉORÈME : Abel Radial

Si la série converge au point R (bord du disque), alors f est continue en R "radialement" :

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

3 Fonctions Développables en Série Entière

DÉFINITION : DSE

Une fonction f est développable en série entière (DSE) au voisinage de 0 s'il existe $R > 0$ et une suite (a_n) tels que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Lien : Si f est DSE, elle est $\mathcal{C}^\infty$. La réciproque est fausse (ex : e^{-1/x^2}).

PROPOSITION : Principe des zéros isolés

Si deux fonctions DSE coïncident sur un voisinage de 0 (aussi petit soit-il), elles sont égales et tous leurs coefficients sont égaux.

4 Développements Usuels

Rayon de Convergence $R = +\infty$

- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Rayon de Convergence $R = 1$

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ *(Primitive de $\frac{1}{1+x}$)*
- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *(Primitive de $\frac{1}{1+x^2}$)*
- $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$