

COURS COMPLET TOPOLOGIE DES E.V.N.

Normes, Continuité, Compacité et Connexité

Table des matières

1 Normes et Espaces Vectoriels Normés	2
1.1 Définition et Exemples	2
1.2 Boules et Convexité	2
2 Suites Vectorielles	3
2.1 Convergence	3
2.2 Valeurs d'adhérence	3
3 Comparaison des Normes	3
4 Topologie : Ouverts et Fermés	4
4.1 Ouverts	4
4.2 Fermés	4
4.3 Adhérence, Intérieur, Frontière	4
5 Limites et Continuité	4
5.1 Continuité en un point	4
5.2 Continuité Globale	4
5.3 Applications Lipschitziennes	5
6 Applications Linéaires Continues	5
7 Compacité	5
8 Continuité sur un Compact	6
9 Connexité par Arcs	6
10 Spécificités de la Dimension Finie	6

1 Normes et Espaces Vectoriels Normés

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1.1 Définition et Exemples

DÉFINITION : Norme

Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **norme** (notée $\|\cdot\|$) si :

1. **Séparation** : $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$.
2. **Homogénéité** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. **Inégalité Triangulaire** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un **Espace Vectoriel Normé (EVN)**.

PROPOSITION : Normes Usuelles

Sur $\mathbb{K}^n$: Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ (Norme euclidienne canonique).
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ (Fonctions) :

- $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ (Convergence uniforme).
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ (Convergence en moyenne).
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ (Convergence en moyenne quadratique).

1.2 Boules et Convexité

DÉFINITION : Boules et Sphères

Soit $a \in E$ et $r > 0$.

- **Boule Ouverte** : $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$.
- **Boule Fermée** : $B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.
- **Sphère** : $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

PROPOSITION : Convexité

Les boules d'un EVN sont toujours des parties **convexes**.

Rappel : A est convexe si $\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in A$.

2 Suites Vectorielles

2.1 Convergence

DÉFINITION : Convergence

Une suite (u_n) de E converge vers $\ell \in E$ si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$$

On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

PROPOSITION : Propriétés

- **Unicité** : Si la limite existe, elle est unique.
- **Bornée** : Toute suite convergente est bornée (i.e. $\{\|u_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré).
- **Opérations** : La convergence est compatible avec la combinaison linéaire.

2.2 Valeurs d'adhérence

DÉFINITION : Valeur d'adhérence

$a \in E$ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une **suite extraite** $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a .

Critère de divergence : Si une suite possède deux valeurs d'adhérence distinctes, elle diverge.

3 Comparaison des Normes

DÉFINITION : Normes Équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

THÉORÈME : Invariance Topologique

Si deux normes sont équivalentes, elles définissent :

- Les mêmes suites convergentes.
- Les mêmes ouverts, fermés, compacts...

4 Topologie : Ouverts et Fermés

4.1 Ouverts

DÉFINITION : Ouvert et Voisinage

- Une partie $U \subset E$ est un **ouvert** si pour tout $x \in U$, il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans U ($\exists r > 0, B(x, r) \subset U$).
- Une partie V est un **voisinage** de x si elle contient un ouvert contenant x .

Stabilité : Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

4.2 Fermés

DÉFINITION : Fermé

Une partie $F \subset E$ est un **fermé** si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

THÉORÈME : Caractérisation Séquentielle des Fermés

F est fermé si et seulement si pour toute suite convergente (u_n) d'éléments de F , la limite appartient à F .

$$(u_n \in F \text{ et } u_n \rightarrow \ell) \implies \ell \in F$$

4.3 Adhérence, Intérieur, Frontière

- **Intérieur** ($\overset{\circ}{A}$) : Le plus grand ouvert inclus dans A .
- **Adhérence** ($\bar{A}$) : Le plus petit fermé contenant A . C'est l'ensemble des limites de suites d'éléments de A .
- **Densité** : A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

5 Limites et Continuité

5.1 Continuité en un point

DÉFINITION : Continuité

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $a \in A$. f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$$

THÉORÈME : Caractérisation Séquentielle (Heine)

f est continue en $a \iff$ Pour toute suite (x_n) de A tendant vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

5.2 Continuité Globale

f est continue sur A si elle est continue en tout point.

PROPOSITION : Image réciproque (Topologique)

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert (resp. tout fermé est un fermé).

5.3 Applications Lipschitziennes**DÉFINITION : Lipschitzienne**

f est k -lipschitzienne si : $\forall (x, y), \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

Propriété : Toute application lipschitzienne est **uniformément continue** (donc continue).

6 Applications Linéaires Continues

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

THÉORÈME : Critère de Continuité

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est continue sur E .
2. u est continue en 0_E .
3. u est **bornée sur la sphère unité**.
4. Il existe $C \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

DÉFINITION : Norme Subordonnée (Opérateur)

Si u est continue, on définit sa **norme d'opérateur** :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

C'est une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$.

7 Compacité**DÉFINITION : Compact (Bolzano-Weierstrass)**

Une partie $K \subset E$ est **compacte** si de toute suite d'éléments de K , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K .

PROPOSITION : Propriétés Topologiques

- Tout compact est **Fermé et Borné**. (La réciproque est fausse en dimension infinie!).
- Un fermé inclus dans un compact est compact.
- Un produit fini de compacts est compact.

8 Continuité sur un Compact

THÉORÈME : Image d'un compact

L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.

$$f(K) \text{ est compact.}$$

THÉORÈME : Bornes Atteintes (Extremums)

Toute fonction numérique ($f : K \rightarrow \mathbb{R}$) continue sur un compact K non vide est bornée et **atteint ses bornes**.

$$\exists (x_{\min}, x_{\max}) \in K^2, \quad f(x_{\min}) = \inf_K f \quad \text{et} \quad f(x_{\max}) = \sup_K f$$

THÉORÈME : Théorème de Heine

Toute application continue sur un compact est **uniformément continue**.

9 Connexité par Arcs

DÉFINITION : Connexe par arcs

Une partie A est connexe par arcs si pour tout couple $(a, b) \in A^2$, il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ reliant a à b .

PROPOSITION : Exemples

- Les parties **convexes** et **étoilées** sont connexes par arcs.
- Dans $\mathbb{R}$, les connexes par arcs sont les **intervalles**.

THÉORÈME : Théorème des Valeurs Intermédiaires Généralisé

L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et A connexe par arcs, alors $f(A)$ est un intervalle.

10 Spécificités de la Dimension Finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

THÉORÈME : Équivalence des Normes

En dimension finie, **toutes les normes sont équivalentes**. *Conséquence* : La notion de convergence ou d'ouvert ne dépend pas de la norme choisie.

THÉORÈME : Caractérisation des Compacts

En dimension finie, les compacts sont exactement les parties **Fermées et Bornées**. (Théorème de Borel-Lebesgue, admis).

PROPOSITION : Continuité Linéaire

En dimension finie, toute application linéaire est **automatiquement continue**.