# COURS COMPLET
# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

*Dénombrabilité, Lois Usuelles, Espérance et Fonctions Génératrices*

## Table des matières

# 1 Dénombrabilité et Espaces Probabilisés

## 1.1 Ensembles Dénombrables

**DÉFINITION : Dénombrabilité**

Un ensemble $E$ est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre $E$ et $\mathbb{N}$. Il est dit **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable (injection dans $\mathbb{N}$).

**PROPOSITION : Propriétés**

— Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

— Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

— $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont **pas** dénombrables.

## 1.2 Espace Probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

— **Tribu $\mathcal{A}$ :** Ensemble de parties de $\Omega$ stable par complémentaire et réunion dénombrable.

— **Probabilité $P$ :** Application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et la **$\sigma$-additivité**.

**THÉORÈME : $\sigma$-additivité et Continuité**

Si $(A_n)$ est une suite d'événements deux à deux disjoints :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

**Continuité croissante :** Si $A_n \subset A_{n+1}$, alors $P(\cup A_n) = \lim P(A_n)$.

## 1.3 Probabilités Conditionnelles

**DÉFINITION : Indépendance**

Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

*Rappel :* Formules de Bayes et des Probabilités Totales (avec systèmes complets d'événements dénombrables) s'appliquent comme en 1ère année.

[Image of probability tree diagram]

# 2 Variables Aléatoires Discrètes (V.A.D.)

## 2.1 Définition et Loi

**DÉFINITION : V.A.D.**

Une variable aléatoire $X$ est une application $\Omega \to E$ telle que :

— L'image $X(\Omega)$ est **au plus dénombrable**.

— Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'événement $\{X = x\}$ appartient à la tribu.

**DÉFINITION : Loi de Probabilité**

La loi de $X$ est la donnée des couples $(x, P(X = x))$ pour tout $x \in X(\Omega)$. La famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une famille sommable de somme 1.

### 2.2 Couples et Indépendance

- **Loi conjointe :** $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y)$.
- **Loi marginale :** $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$.

**THÉORÈME : Indépendance de V.A.**

$X$ et $Y$ sont indépendantes si :

$$\forall (x, y), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

**Lemme des coalitions :** Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

## 3 Lois Usuelles Discrètes

### 3.1 Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$

*Modèle : Rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (proba succès $p$).*

- Support : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$.
- Loi : $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.
- Espérance : $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Variance : $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

### 3.2 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

*Modèle : Événements rares, limite de la loi Binomiale quand $n \to \infty, np \to \lambda$.*

- Support : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Loi : $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- Espérance : $E(X) = \lambda$.
- Variance : $V(X) = \lambda$.

## 4 Moments

### 4.1 Espérance (Moyenne)

**DÉFINITION : Espérance**

$X$ admet une espérance (on note $X \in L^1$) si la famille $(xP(X = x))_x$ est **sommable** (convergence absolue de la série).

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

**THÉORÈME : Théorème de Transfert**

$Y = f(X)$ admet une espérance ssi la famille $(f(x)P(X = x))$ est sommable.

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

**PROPOSITION : Propriétés**

- **Linéarité :** $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- **Indépendance :** Si $X, Y$ indépendants et intégrables, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

### 4.2 Variance et Dispersion

**DÉFINITION : Variance**

$X$ admet une variance ($X \in L^2$) si $E(X^2)$ existe.

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{(König-Huygens)}$$

**PROPOSITION : Opérations**

- $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- Si $X$ et $Y$ sont **indépendantes** : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

## 5 Inégalités et Asymptotique

### 5.1 Inégalités Classiques

**THÉORÈME : Markov**

Si $X$ est positive et possède une espérance : $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

**THÉORÈME : Bienaymé-Tchebychev**

Si $X$ admet une variance : $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

### 5.2 Loi Faible des Grands Nombres (LFGN)

Soit $(X_n)$ une suite de variables i.i.d. (indépendantes et de même loi) admettant une variance. On pose $S_n = \sum X_k$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

*Interprétation :* La moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance théorique.

# 6 Fonctions Génératrices

## 6.1 Définition

Soit $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice est la série entière :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$$

**Propriété :** Le rayon de convergence est toujours $\geq 1$. $G_X$ caractérise la loi.

## 6.2 Utilisation

**PROPOSITION : Moments et Somme**

— **Espérance :** Si $G_X$ est dérivable en $1^-$, $E(X) = G'_X(1)$.

— **Variance :** $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

— **Somme Indépendante :** Si $X, Y$ indépendants, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$.